

Fortgeschrittenen-Praktikum F1

Versuch K1

Quanten-Hall-Effekt

Inhaltsverzeichnis

1	Klassische Behandlung von Elektronen im elektrischen und magnetischen Feld (Drude Modell)	3
1.1	Der klassische Hall-Effekt für geringe Magnetfelder	4
1.2	Klassische Betrachtung für hohe Magnetfelder	5
1.3	Bewegung der Elektronen in einem Antidotübergitter	7
2	Verwendete Halbleiterstrukturen	9
2.1	Erzeugung eines zweidimensionalen Elektronengases	9
3	Energiequantisierung im Magnetfeld	13
3.1	Landau-Niveaus	13
3.2	Starke Lokalisierung durch Unordnung	15
3.3	Thermische Streuung an der Fermikante	16
3.4	Modell der Randkanäle	17
3.5	Shubnikov-de Haas-Oszillationen	21
3.6	Quanten-Hall-Effekt	22
4	Der Praktikumsversuch	24
4.1	Aufbau des Experiments und Probeneigenschaften	24
4.2	Durchführung	27
4.3	Auswertung	28
5	Weiterführende Literatur	31

In den vergangenen vier Jahrzehnten haben die gängigen elektronischen Halbleiterbauelemente eine rasante Entwicklung durchlaufen. Ein gutes Beispiel hierfür ist die Anzahl der Transistoren auf einem Mikrochip, die sich nach Moore's Gesetz ungefähr alle 18 Monate verdoppelt. Während Anfang der sechziger Jahre nur wenige Transistoren auf einem Chip Platz hatten, befinden sich davon auf einer aktuellen CPU über 700 Millionen (Stand 2009)! Als Transistoren werden dabei praktisch ausschließlich so genannte CMOSFETs aus Silizium verwendet. Diese "complementary metal-oxide-semiconductor field-effect-transistors" erlauben aufgrund ihrer geringen Energiedissipation hohe Packungsdichten. Sie basieren auf einem zweidimensionalen Elektronengas (2DEG), welches sich bei geeigneter Spannung zwischen dem Metallgatter und einem Halbleiter an der Grenzschicht zwischen Halbleiter und Oxidschicht (Isolator zwischen Metallgatter und Halbleiter) bildet. Dabei kann die Ladungsträgerdichte im 2DEG in Abhängigkeit von der Gatterspannung variiert werden.

Klaus von Klitzing entdeckte im Jahr 1980 den Quantenhalleffekt (QHE), wofür er bereits fünf Jahre später den Nobelpreis erhielt. Er untersuchte die Hall-Spannung des 2DEGs eines Silizium-MOSFETs bei hohen Magnetfeldern und sehr tiefen Temperaturen in Abhängigkeit der Ladungsträgerdichte. Anstatt eines kontinuierlichen Anstiegs der Hall-Spannung bei abnehmender Ladungsträgerdichte oder zunehmendem Magnetfeld, wie für den klassischen Halleffekt erwartet, fand er, dass der Hallwiderstand in Stufen anstieg. Bemerkenswert ist hierbei die Präzision, mit der der Quantenhalleffekt in einer solchen Anordnung trotz der noch relativ hohen Streuung der Ladungsträger im 2DEG eines MOSFETs beobachtet werden kann. In der Grundlagenforschung spielen inzwischen 2DEGs an Grenzflächen in Halbleiterheterostrukturen eine übergeordnete Rolle. Denn in solchen 2DEGs erreicht man aufgrund von geringen Defektdichten an der Grenzfläche besonders hohe Beweglichkeiten der Ladungsträger.

In diesem Praktikumsversuch sollen die Quantisierung des Hallwiderstands sowie Shubnikov-de Haas-Oszillationen des Längswiderstands in einem zweidimensionalen Elektronensystem einer GaAs/AlGaAs-Heterostruktur untersucht werden. Beide Effekte sollen an zwei unterschiedlichen Halbleitergrenzflächen gemessen werden – einer unveränderten und einer, der zusätzlich ein spezielles Lochmuster (Antidotgitter) in das Gebiet des 2DEG geätzt wurde. Zusätzlich soll die Ladungsträgerdichte im 2DEG mit Hilfe einer auf der Probenoberfläche angebrachten Elektrode variiert werden. Die Probe wird mit Hilfe von flüssigem Helium, welches bei Normaldruck eine Temperatur von 4.2 K hat, gekühlt. Hohe magnetische Feldstärken von bis über 5 Tesla werden mittels einer supraleitenden Spule erreicht, die zur Kühlung direkt mit flüssigem Helium in Kontakt ist.

1 Klassische Behandlung von Elektronen im elektrischen und magnetischen Feld (Drude Modell)

Lässt man einen Strom \vec{I} senkrecht zu einem äußeren Magnetfeld \vec{B} durch einen Halbleiter fließen, so entsteht bei geeigneter Geometrie senkrecht zu Strom und Magnetfeld eine Querspannung \vec{U}_H , die so genannte Hall-Spannung. Zunächst wird in diesem Kapitel der klassische Hall-Effekt ausgehend vom Drude-Modell behandelt. In Hinblick auf das Verständnis des Quanten-Hall-Effekts ist es hierbei instruktiv, den Fall starker Streuung von dem nahezu ballistischen Bewegung der Ladungsträger zu unterscheiden. Als Ladungsträger kommen im Festkörper Elektronen sowie Löcher in Frage, und in der von uns verwendeten Probe handelt es sich um Elektronen.

Ein freies Elektron in einem elektrischen sowie einem darauf senkrecht stehenden magnetischen Feld ($\vec{E} = E_x$ und $\vec{B} = B_z$), bewegt sich auf einer so genannten Zyklotron-Bahn mit der Bewegungsgleichung

$$\vec{F} = m_e \dot{\vec{v}} = -e(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) . \quad (1)$$

Dabei ist e der Absolutbetrag der Ladung eines Elektrons mit Masse m_e und Geschwindigkeit \vec{v} . Die allgemeine Lösung dieser Trajektorie ist eine Kreisbewegung mit der Zyklotronfrequenz $\omega_c = eB/m$ überlagert von einer gleichförmigen Bewegung der Geschwindigkeit E/B . Die gleichförmige Komponente der Bewegung ist dabei senkrecht zu *beiden* angelegten Feldern, \vec{E} und \vec{B} ! Das Elektron bewegt sich also spiralförmig entlang der Äquipotentiallinien.

Betrachtet man die Bewegung eines Elektrons in einem idealen Kristall, so kann die mittlere Wechselwirkung mit dem Kristallfeldpotential – also dem regelmäßigen Gitter – berücksichtigt werden, indem die freie Elektronenmasse m_e in Gleichung (1) durch die *effektive* Masse m ersetzt wird. In GaAs-Kristallen beträgt diese $m \simeq 0.07 m_e$. Im realen Festkörper muss außerdem noch die Streuung der Elektronen an Kristalldefekten, Gitterschwingungen und anderen Elektronen berücksichtigt werden. In einem phänomenologischen Ansatz führen wir die Impuls-Relaxationszeit τ ein, die ein Maß dafür ist, in welcher Zeit die Ladungsträger ihren Impuls durch Streuprozesse verlieren. Die Bewegungsgleichung (1) nimmt somit die Form

$$\vec{F} = \left. \frac{d\vec{p}}{dt} \right|_{\text{Streuung}} + \left. \frac{d\vec{p}}{dt} \right|_{\text{Felder}} = \frac{m\vec{v}}{\tau} - e(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$$

an. Die Lösung dieser Differenzialgleichung ist für den statischen Limes ($F = 0$) einfach. Für ein Magnetfeld $\vec{B} = B\vec{e}_z$ in z -Richtung senkrecht zum elektrischen Feld ergibt sich in Matrixschreibweise

$$\begin{pmatrix} E_x \\ E_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m/e\tau & -B \\ +B & m/e\tau \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix} .$$

Da die Elektronen für die gewählten Randbedingungen keine Kraft in z -Richtung erfahren, beschreibt die zweidimensionale Darstellung das Problem vollständig.

Diese Gleichung kann mit Hilfe der bereits eingeführten Zyklotronfrequenz $\omega_c = eB/m$, der spezifischen Leitfähigkeit $\sigma_0 = e^2 n_e \tau / m$ und der Stromdichte $\vec{j} = e \langle \vec{v} \rangle n_e$ in Form des ohmschen Gesetzes $\vec{E} = \hat{\rho} \vec{j}$ geschrieben werden

$$\begin{pmatrix} E_x \\ E_y \end{pmatrix} = \sigma_0^{-1} \begin{pmatrix} 1 & -\omega_c \tau \\ \omega_c \tau & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j_x \\ j_y \end{pmatrix}, \quad (2)$$

wobei n_e die Ladungsträgerdichte und $\langle \vec{v} \rangle$ den Erwartungswert der Elektronengeschwindigkeit bezeichnen. Aufgrund des Magnetfeldes senkrecht zum elektrischen Feld geht der ohmsche Widerstand in den Widerstandstensor

$$\hat{\rho} = \sigma_0^{-1} \begin{pmatrix} 1 & -\omega_c \tau \\ \omega_c \tau & 1 \end{pmatrix} \quad (3)$$

über. Wenn kein Magnetfeld anliegt, so verschwinden die Außerdiagonalelemente im Widerstandstensor und Gleichung (2) beschreibt das bekannte ohmsche Gesetz $U = R \cdot I$. Der Längswiderstand (in Richtung des angelegten elektrischen Feldes) ist unabhängig vom Magnetfeld, und $\rho_{xx} = \rho_{yy} = \sigma_0^{-1}$. Der Querwiderstand (senkrecht zum angelegten elektrischen Feld) verhält sich wie $\rho_{yx} = -\rho_{xy} = \sigma_0^{-1} \omega_c \tau = B / e n_e$ und nimmt proportional zum Magnetfeld zu.

1.1 Der klassische Hall-Effekt für geringe Magnetfelder

Eine typische Versuchsanordnung ist schematisch in Abb. 1 dargestellt. Experi-

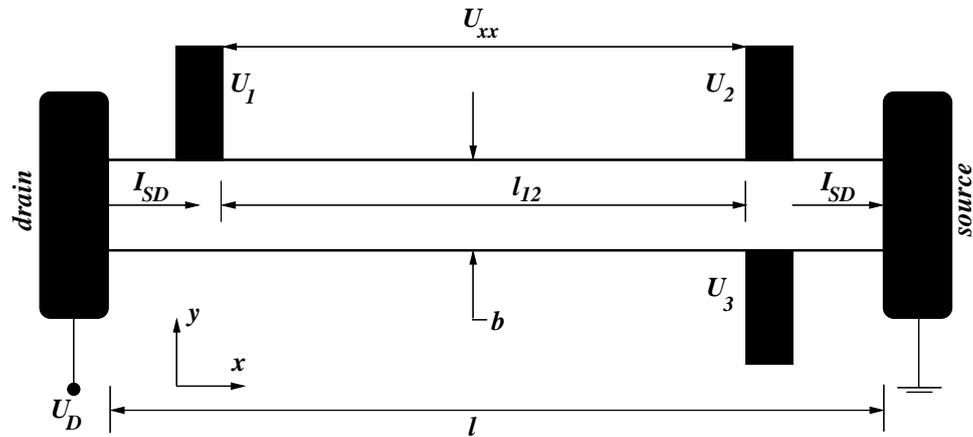


Abbildung 1: Prinzip der Messung der Hall-Spannung $U_{yx} = U_2 - U_3$ und der Längsspannung $U_{xx} = U_1 - U_2$

mentell bestimmt man den Widerstandstensor in Gleichung (3), indem man durch eine rechteckige Probe einen konstanten Strom $\vec{I} = I \vec{e}_x$ in Längsrichtung (x -Richtung) fließen lässt und den Spannungsabfall in Längsrichtung $U_{xx} = U_1 - U_2$ und in Querrichtung (in y -Richtung) $U_{yx} \equiv U_H = U_2 - U_3$ in Abhängigkeit vom

Magnetfeld $\vec{B} = B\vec{e}_z$ (in z -Richtung) misst. In der in Abb. 1 skizzierten Anordnung entsprechen $U_{xx} = E_x l_{12}$ und $U_{yx} = E_y b$. Unter der Annahme eines relativ geringen Magnetfeldes ($\omega_c \tau \ll 1$) gilt $E_y \ll E_x$, so dass im statischen Limes ein gleichförmig über die Probe verteilter Strom in x -Richtung mit $j_x = I/b$ und $j_y = 0$ vorliegt. Anschaulich bedeutet die Bedingung $\omega_c \tau \ll 1$ eine so starke Streuung der Elektronen, dass deren Impulsverteilung im Wesentlichen der thermodynamischen Verteilung entspricht, welche von einer Driftbewegung der Elektronen entgegen der Stromrichtung überlagert ist. Man definiert deshalb die Driftgeschwindigkeit der Elektronen $v_d = \langle v \rangle$. In diesem Fall ergibt sich für den Zusammenhang zwischen den Einträgen des Widerstandstensors und den gemessenen Spannungsabfällen

$$\rho_{xx} = \frac{U_{xx}}{I} \frac{b}{l_{12}} \quad \text{und} \quad \rho_{yx} = \frac{U_{yx}}{I} .$$

Ein Vergleich mit Gleichung (3) liefert die Ladungsträgerdichte in der Hall-Probe

$$n_e = \left(e \frac{d\rho_{yx}}{dB} \right)^{-1} = \frac{I/e}{dU_{yx}/dB}$$

und schließlich die Beweglichkeit der Elektronen, welche als der Absolutbetrag des Verhältnisses der Driftgeschwindigkeit zum elektrischen Feld definiert ist

$$\mu_e = \left| \frac{v_d}{E_x} \right| = \frac{\sigma_0}{en_e} .$$

1.2 Klassische Betrachtung für hohe Magnetfelder

Nachdem im letzten Abschnitt der Grenzfall $\omega_c \tau \ll 1$ behandelt wurde, soll er nun mit dem entgegengesetzte Grenzfall eines sehr großen Magnetfeldes ($\omega_c \tau \gg 1$) verglichen werden. Der Widerstandstensor (3) kann durch Matrixinversion in den Leitwerttensor, definiert über die Beziehung $\vec{j} = \hat{\sigma} \vec{E}$, überführt werden

$$\hat{\sigma} = \sigma_0 \begin{pmatrix} \frac{1}{1+\omega_c^2 \tau^2} & \frac{\omega_c \tau}{1+\omega_c^2 \tau^2} \\ -\frac{\omega_c \tau}{1+\omega_c^2 \tau^2} & \frac{1}{1+\omega_c^2 \tau^2} \end{pmatrix} . \quad (4)$$

Wenn kein Magnetfeld angelegt ist, so verschwinden wie im Widerstandstensor auch im Leitwerttensor die Außerdiagonalelemente. Gleichung (4) beschreibt dann das ohmsche Gesetz in seiner skalaren Form, und es fließt ausschließlich Strom in Richtung des angelegten elektrischen Feldes. In Längsrichtung gilt für ein geringes Magnetfeld ($\omega_c \tau \ll 1$) entsprechend dem ohmschen Gesetz in erster Ordnung $\sigma_{xx} = \rho_{xx}^{-1} = \sigma_0$. Verblüffend ist die Situation entlang des angelegten elektrischen Feldes im Grenzfall eines hohen Magnetfeldes ($\omega_c \tau \gg 1$). Hier findet man

$$\sigma_{xx} \longrightarrow \frac{\sigma_0}{(\omega_c \tau)^2} = \frac{(en)^2}{B} \frac{1}{\sigma_0} \propto \rho_{xx} !$$

Dieser scheinbar paradoxe Zusammenhang, nämlich dass der Leitwert σ_{xx} in Längsrichtung proportional zum spezifischen Widerstand ρ_{xx} ist, zeigt deutlich, dass in Anwesenheit eines starken Magnetfeldes das ohmsche Gesetz in der Form $U = R \cdot I$ seine Gültigkeit verliert. Für die Außerdiagonalelemente gilt dagegen für große Magnetfelder $-\sigma_{xy} = \rho_{yx}^{-1} (= en_e/B)$. Für fast verschwindende Magnetfelder findet man $-\sigma_{xy} = \sigma_0^2 \rho_{yx}$.

Anhand des Verlaufs der Äquipotentiallinien in einer länglichen Probe soll diese Situation jetzt anschaulich diskutiert werden. Im oberen Teilbild der Abb. 2 sind die Äquipotentiallinien für den Fall eines verschwindend kleinen Magnetfeldes dargestellt. Die Stromdichte ist gleichmäßig in der Probe verteilt und $j_y = 0$.

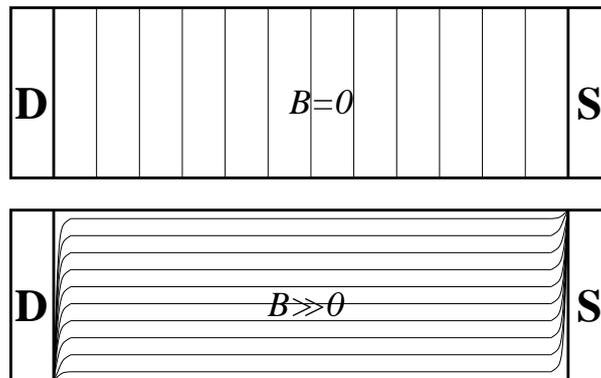


Abbildung 2: Schematische Darstellung der Äquipotentiallinien in einer zweidimensionalen Hall-Probe ohne Magnetfeld (oben) und bei einem hohen Magnetfeld senkrecht zur Probe (unten).

Liegt ein starkes Magnetfeld senkrecht zur Probe und zum elektrischen Feld an ($\omega_c \tau \gg 1$), so kann bei der Lösung der Bewegungsgleichung (2) nicht mehr $j_y = 0$ in der gesamten Probe angenommen werden. Die Elektronen werden in erster Linie von dem starken Magnetfeld und nicht dem viel schwächeren elektrischen Feld in Source-Drain-Richtung getrieben. Aufgrund der aus der endlichen Breite der Probe resultierenden großen Hall-Spannung ergibt sich ein Verlauf der Äquipotentiallinien, wie er im unteren Teilbild der Abb. 2 skizziert ist. Das Bild zeigt, dass im starken Magnetfeld die Hall-Spannung identisch mit der Source-Drain-Spannung ist $U_{SD} \equiv U_x = U_y \equiv U_H$. Im Beispiel der Skizze liegt die obere Längsseite der Probe auf demselben Potential wie der Drain-Kontakt und die untere Längsseite der Probe auf demselben Potential wie der Source-Kontakt. Für eine Probe der Länge l und Breite b folgt $E_y/E_x = l/b$, was bedeutet, dass für eine längliche Probe mit $l \gg b$ das elektrische Feld in Querrichtung viel größer werden kann als das durch die Source-Drain-Spannung verursachte in Längsrichtung. Die Elektronen bewegen sich zwischen Streuprozessen (beachte $\omega_c \tau \gg 1$) spiralförmig entlang der Äquipotentiallinien (vgl. Abb. 2 - unten). Fast die gesamte Längsspannung fällt allerdings sehr dicht an den Source- und Drainkontakten an den so genannten

”hot spots” ab, an denen die Äquipotentiallinien am dichtesten liegen. Es wurde experimentell nachgewiesen, dass diese Stellen einer stromdurchflossenen Probe besonders stark erwärmt werden.

Man beachte, dass aufgrund der inhomogenen Verteilung des elektrischen Feldes in der Probe der lokale Längswiderstand ρ_{xx} nicht über die Source-Drain-Kontakte gemessen werden kann. Stattdessen ist eine Vierpunktmessung notwendig. Hierbei wird anstelle von U_{SD} die Spannung U_{xx} bei konstantem Source-Drain-Strom gemessen (vgl. Abb. 1), während die Zuleitungen für den Spannungsabgriff stromfrei sind, so dass deren Widerstand nicht in die Messung eingeht. Wichtig ist dabei, dass bei dieser Vierpunktmessung der Spannungsabfall über die ”hot spots” nicht mitgemessen wird ($U_{SD} > U_{xx}$).

1.3 Bewegung der Elektronen in einem Antidotübergitter

Im Folgenden soll nur der Grenzfall $\omega_c \tau \gg 1$ betrachtet und die Streuung der Elektronen vernachlässigt werden. Die allgemeine Lösung der Bewegungsgleichung (1) unter Berücksichtigung der Randbedingung $E_y/E_x = l/b$ ergibt eine Zyklotronbahn der Form

$$\vec{v} = -\frac{e}{m\omega_c} \begin{pmatrix} \frac{l}{b} E_x \\ -E_x \end{pmatrix} + v_0 \begin{pmatrix} \cos \omega_c t \\ \sin \omega_c t \end{pmatrix} \quad (5)$$

Für $l \gg b$ ist die y -Komponente des gleichförmigen Teils der Bewegung vernachlässigbar. Der Bahnradius (Zyklotronradius) des kreisförmigen Anteils der Trajektorie eines Elektrons ist durch das Magnetfeld festgelegt. Für ein Elektron mit der Fermigeschwindigkeit v_F beträgt dieser

$$R_c = \frac{v_F}{\omega_c} = \frac{m}{eB} \frac{\hbar}{m} \sqrt{2\pi n_e} = \frac{\hbar}{eB} \sqrt{2\pi n_e} .$$

Es ist möglich, auf eine zweidimensionale Hall-Probe ein periodisches Gitter künstlicher Streuzentren, so genannter Antidots, einzuzüchten. Als Antidot bezeichnet man einen nichtleitenden Bereich geringer Ausdehnung in leitfähiger Umgebung. Der Begriff Antidot leitet sich vom inversen Fall einer isolierten Elektroneninsel (Quantenpunkt oder engl. quantum dot) ab. Die Transporteigenschaften einer Hall-Probe werden durch die Streuzentren eines Antidotgitters maßgeblich beeinflusst. In Abb. 3 sind einige mögliche Elektronenbahnen im Antidotgitter für den Fall $l \gg b$ angedeutet. Falls der Bahndurchmesser kleiner als der Abstand der Antidot-Gitterpunkte ist, ergeben sich so genannte Runaway-Trajektorien und der Längswiderstand verringert sich. Bei charakteristischen Magnetfeldern entspricht der Zyklotronradius $R_c(B)$ geschlossenen Bahnen, die gerade einen oder mehrere Antidots einschließen. Dies führt zu einer Lokalisierung der Elektronen im Antidotgitter (in den geschlossenen Bahnen) und bewirkt einen erhöhten elektrischen Widerstand entlang der Probe (Siehe auch Kapitel 3.2). In dem Praktikumsversuch sollen unter anderem die Kommensurabilitätsoszillationen des Längswiderstandes untersucht werden, die sich im Antidotgitter aufgrund der Magnetfeldabhängigkeit des Zyklotronradius ergeben.

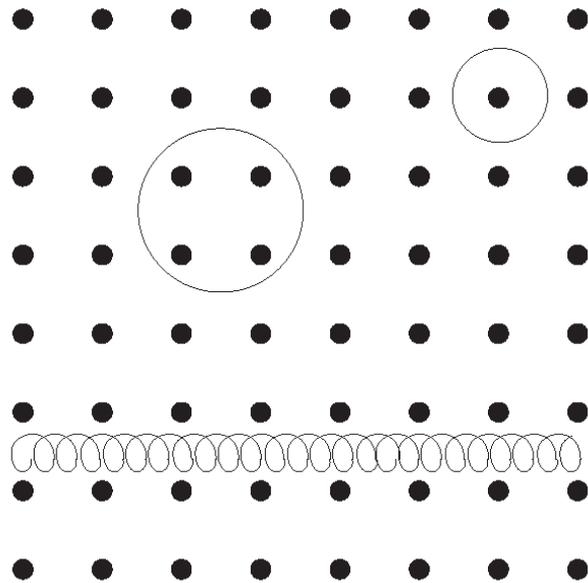


Abbildung 3: Elektronentrajektorien im Antidot-Gitter schematisch skizziert für drei verschiedene Magnetfelder

Abschließend soll noch darauf hingewiesen sein, dass die tatsächlichen Elektronenbahnen zusätzlich durch die Modulation des elektrischen Potentials aufgrund der nichtleitenden Inseln (Antidots) beeinflusst werden, was hier jedoch vernachlässigt wurde.

2 Verwendete Halbleiterstrukturen

Die im letzten Kapitel behandelten Phänomene wurden mit *klassischer* Elektrodynamik beschrieben. Dabei war es nicht notwendig, sich auf zweidimensionale Proben zu beschränken. Zur Beobachtung des Quantenhalfeffektes ist allerdings eine zweidimensionale Anordnung der Ladungsträger erforderlich, da zusätzliche Freiheitsgrade der Elektronen in z -Richtung die Quantisierung der Elektronenenergien im Magnetfeld verhindern würden. Außerdem muss wiederum die Bedingung $\omega_c\tau \gg 1$ erfüllt sein, damit die Quantisierung der Elektronenimpulse nicht durch Streuprozesse zerstört wird. Da nicht beliebig hohe Magnetfeldstärken erreicht werden können, benötigt man deshalb eine sehr hohe Beweglichkeit $\mu = e\tau/m$ der Ladungsträger. Streuprozesse an thermischen Gitterschwingungen (Phononen) können durch Kühlen der Probe minimiert werden. Echte zweidimensionale Elektronen- bzw. Löchersysteme existieren z. B. an den Halbleiter-Oxid-Grenzschichten in MOSFETs (siehe Einleitung). Die Beweglichkeit der Ladungsträger wird in diesen Systemen vor allem durch Streuung an Kristalldefekten an der Grenzschicht reduziert. Tatsächlich ist die Oxidschicht in MOSFETs sogar amorph, sollte also zu besonders starker Streuung führen. Allerdings bewirkt die räumliche Ausdehnung der Ortswellenfunktion der Ladungsträger, dass das zweidimensionale System von der Grenzfläche separiert im Inneren der Halbleiterschicht liegt, wodurch die Streuung an Defekten deutlich verringert ist.

In dem Praktikumsversuch wird eine Halbleiter-Heterostruktur mit einem zweidimensionalen Elektronengas (2DEG) nahe der Grenzschicht zwischen GaAs und n-dotiertem AlGaAs verwendet. Der Vorteil von solchen Strukturen gegenüber MOSFETs ist, dass man aufgrund der sehr reinen einkristallinen Schichten und aufgrund einer räumlichen Trennung des 2DEGs von den Donatorstörstellen extrem hohe Beweglichkeiten der Elektronen erreichen kann. Nachfolgend wird beschrieben, wie ein solches zweidimensionales Elektronengas zustande kommt.

2.1 Erzeugung eines zweidimensionalen Elektronengases

Bei einem gewöhnlichen Halbleiter können sich die Leitungselektronen innerhalb des Materials in alle drei Raumrichtungen frei bewegen. Einschränkungen der Bewegung gibt es nur durch Streuung oder die sehr hohen Potentiale am Rand, was aber die Dimensionalität nicht einschränkt. Man kann die Elektronen in solch einem Material als thermodynamisches dreidimensionales Elektronengas beschreiben. Wenn die Bewegung der Elektronen nun in einer Raumrichtung eingeschränkt wird, so dass sie sich nur noch in einer Ebene bewegen können, spricht man von einem zweidimensionalen Elektronengas, oft auch als 2DEG abgekürzt. Abb. 4 skizziert den Bereich der Grenzfläche zwischen GaAs und AlGaAs in einer GaAs/AlGaAs-Heterostruktur. Ohne äußere Spannung stellt die Fermienergie E_F im Gleichgewicht einer zusammenhängenden Probe eine Äquipotentialfläche dar. In Abb. 4b) ist keiner der beiden Halbleiter dotiert. Da (bei $T = 0$) keine beweglichen Ladungen vorhanden sind, ändern sich die Energien der Bandkanten an der Kon-

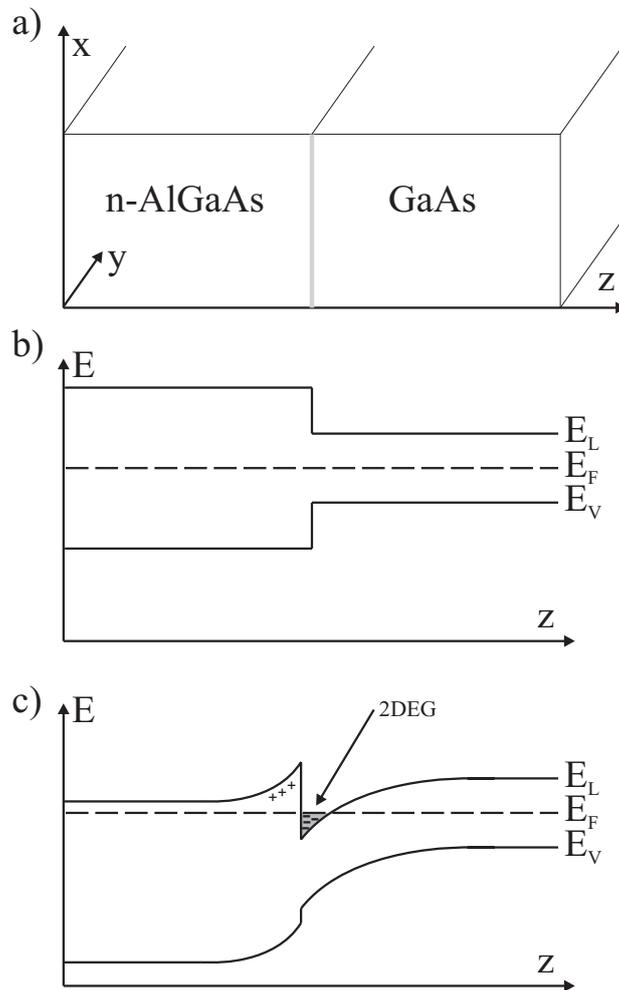


Abbildung 4: Deformation der Bandkante in einer Heterostruktur

taktfläche abrupt. In Abb. 4 c) wurde n-dotiertes AlGaAs verwendet. In dem skizzierten Fall sind die Donatoratome homogen im gesamten AlGaAs-Kristall verteilt. Aufgrund der unterschiedlichen chemischen Potentiale der beiden Materialien verschieben sich Donatorelektronen in den Bereich des GaAs und die Bandkanten verbiegen sich entsprechend in der Nähe der Grenzfläche. Bei der selbstkonsistenten Lösung dieses Problems ist zu beachten, dass AlGaAs eine größere Bandlücke als GaAs besitzt und die Fermienergie in AlGaAs aufgrund der n-Dotierung nur knapp unterhalb der Leitungsbandkante liegt. Bei geeigneter Dotierung besitzt das Leitungsband auf der GaAs-Seite der Kontaktfläche einen sehr schmalen dreieckigen Potentialtopf, dessen Minimum unterhalb der Fermienergie liegt. Die genaue Lage des Potentialtopfes wird dabei von der Ausdehnung der Ortswellenfunktion der Elektronen und deren Wechselwirkung bestimmt. Wichtig ist hierbei, dass – wie

bereits für den Fall der MOSFETs erläutert wurde – die endliche Ausdehnung der Ortswellenfunktionen der Elektronen bewirkt, dass das 2DEG von der Kontaktfläche der beiden Materialien separiert ist. Dadurch ist die Streuung der Ladungsträger des 2DEGs an Oberflächendefekten der Kontaktfläche oder an Donatoratomen im AlGaAs minimiert. Aufgrund der starken räumlichen Einschränkung in diesem Dreieckpotential ergibt sich aus der Lösung der Schrödingergleichung, dass das Energiespektrum in z -Richtung diskret ist, während in den anderen Raumrichtungen (bei genügend großer lateraler Ausdehnung der Probe) keine Einschränkung vorliegt. Es bilden sich so genannte Subbänder aus. Die Dispersionsrelation des 2DEGs lautet

$$E = E_c + \varepsilon_s + \frac{\hbar^2}{2m} (k_x^2 + k_y^2) . \quad (6)$$

E_c ist die Energie des Leitungsbandes im Minimum des dreieckförmigen Potentialtopfes. Die Subbandenergie ε_s entsteht durch die Quantisierung der Bewegung in z -Richtung aufgrund des Potentialtopfes. Bei den tiefen Temperaturen im Experiment befinden sich die Elektronen im untersten Subband mit Energieniveau ε_0 . Der letzte Term beschreibt schließlich die kinetische Energie, die die Ladungsträger aufgrund ihrer freien Bewegung in der xy -Ebene besitzen.

Als nächstes soll die Zustandsdichte der Elektronen im 2DEG bestimmt werden. Dazu zählen wir zunächst im k_x - k_y -Impulsraum die Zustände, die sich innerhalb eines Kreises mit Radius k befinden. Mit periodischen Randbedingungen erhält man die möglichen quantisierten Werte

$$k_x = n_x(2\pi/l) \quad \text{und} \quad k_y = n_y(2\pi/b)$$

wobei b und l die Abmessungen der Probe und n_x sowie n_y ganze Zahlen sind. Mit der Probenfläche $S = lb$ ergibt sich die „Fläche“, die ein Zustand im Impulsraum einnimmt

$$\frac{2\pi}{l} \cdot \frac{2\pi}{b} = \frac{4\pi^2}{S} .$$

Unter Berücksichtigung der Spinartung (2 Zustände pro $\frac{4\pi^2}{S}$) ergibt sich die Anzahl der Zustände $Z(E)$ innerhalb eines Kreises mit Fläche πk^2 im Impulsraum (für $E > E_c + \varepsilon_0 \equiv E_0$) als

$$Z(E) = 2 \frac{\pi k^2}{4\pi^2/S} = S \frac{k^2}{2\pi} = \frac{mS}{\pi\hbar^2} (E - E_0) ,$$

wobei das letzte Gleichheitszeichen aus (6) folgt. Die Zustandsdichte im 2DEG nimmt die Form

$$N(E) = \frac{1}{S} \frac{d}{dE} Z(E) = \frac{m}{\pi\hbar^2} \theta(E - E_0) \quad (7)$$

an, wobei die Theta-Funktion folgendes Verhalten zeigt

$$\theta(E - E_0) = \begin{cases} 0 & \text{für } E < E_0 \\ 1 & \text{für } E > E_0 \end{cases} .$$

Sie drückt aus, dass keine Zustände mit $E < E_0$ existieren. Für $E > E_0$ ist die Zustandsdichte der Ladungsträger im 2DEGs also unabhängig von der Energie!

3 Energiequantisierung im Magnetfeld

Im letzten Kapitel wurde argumentiert, dass die räumliche Einschränkung des Elektronensystems in einer Dimension zu einer Quantisierung des Energiespektrums hinsichtlich dieser Dimension führt. Eine weitere Möglichkeit, das Energiespektrum des Elektronensystems zu quantisieren, ist durch Anlegen eines großen Magnetfeldes. Die Drehimpulsquantisierung bewirkt nämlich, dass eine Bewegung senkrecht zum Magnetfeld nur innerhalb bestimmter Zyklotronradien $R_c = v/\omega_c$ erlaubt ist. Ist das Magnetfeld zusätzlich senkrecht zu einem 2DEG ausgerichtet, so ist die Bewegung der Elektronen in allen drei Raumrichtungen eingeschränkt. Voraussetzung für die Beobachtung der Quanteneigenschaften des Energiespektrums ist allerdings, dass die Ladungsträger nicht aus ihren Zyklotronradien herausgestreut werden, also $\omega_c \tau \gg 1$ gilt. Außerdem wird sich herausstellen, dass eine zweite Bedingung erfüllt sein muss, nämlich dass der Abstand zwischen den erlaubten Energiequanten größer als die thermische Energie der Elektronen (an der Fermikante) ist.

3.1 Landau-Niveaus

Um die Energiequantisierung im Magnetfeld zu untersuchen, stellen wir zunächst die Schrödinger-Gleichung für ein zweidimensionales Elektronensystem auf

$$\hat{H}\Phi = \left[-\frac{\hbar^2}{2m} \left(\vec{\nabla} - \frac{e\vec{A}}{i\hbar} \right)^2 \right] \Phi = E\Phi . \quad (8)$$

Das magnetische Vektorpotential \vec{A} muss so gewählt werden, dass $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$ erfüllt ist. Bei einem \vec{B} -Feld in z -Richtung (senkrecht zum 2DEG) ergibt sich mit der Landau-Eichung das Vektorpotential zu $\vec{A} = (0, Bx, 0)$. Da die Symmetrie in z -Richtung durch Magnetfeld und 2DEG ausgezeichnet ist, bietet sich für die Wellenfunktion der Separationsansatz

$$\Phi(x, y, z) = \zeta(x, y)\xi(z)$$

an. Die Eigenenergien von $\xi(z)$ sind die in (6) eingeführten Subbandenergien ε_s . Die Schrödinger-Gleichung (8) lautet für die verbleibende zweidimensionale Wellenfunktion $\zeta(x, y)$

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{eBx}{i\hbar} \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} - \left(\frac{eBx}{\hbar} \right)^2 \right] \zeta(x, y) = E\zeta(x, y) .$$

Ein in Verbindung mit der Landau-Eichung gebräuchlicher Ansatz ist

$$\zeta(x, y) = e^{-ik_y y} \psi(x) .$$

Damit nimmt die Schrödingergleichung folgende Gestalt an

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \left[\frac{\partial}{\partial x^2} + \frac{eBk_y x}{\hbar} - k_y^2 - \left(\frac{eBx}{\hbar} \right)^2 \right] \psi(x) = E\psi(x) .$$

Unter Verwendung der Zyklotron-Frequenz $\omega_c = eB/m$ und der Substitution $x_0 \equiv \hbar k_y / eB$ ergibt sich schließlich

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{m}{2} \omega_c^2 (x - x_0)^2 \psi(x) = E\psi(x) .$$

Dies ist die Differenzialgleichung eines eindimensionalen harmonischen Oszillators mit den Hermite-Polynomen als Lösungen. Für die Eigenwerte der Energien ergeben sich die so genannten *Landau-Niveaus*

$$\varepsilon_n = \hbar\omega_c \left(n + \frac{1}{2} \right) , \quad (9)$$

wobei $\frac{1}{2}\hbar\omega_c$ die Nullpunktsenergie und $n = 0, 1, 2, \dots$ die Quantenzahl der Landau-Niveaus ist. In Gleichung (9) ist die Zeemanaufspaltung durch das Magnetfeld noch unberücksichtigt. In Abb. 5 sind die spinaufgespaltenen Landau-Niveaus dar-

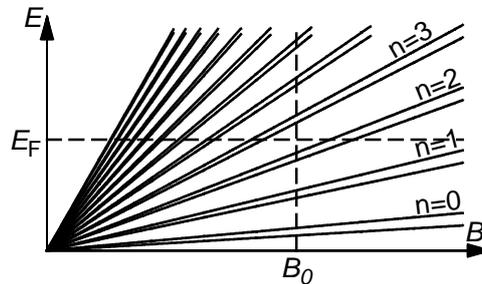


Abbildung 5: Energie der ersten 12 spinaufgespaltenen Landau-Niveaus in Abhängigkeit vom Magnetfeld. Die Amplitude der Zeemanaufspaltung ist stark übertrieben dargestellt. Bei dem Magnetfeld B_0 sind noch die untersten drei Landau-Niveaus besetzt.

gestellt. In diesem Beispiel liegt die Fermienergie bei dem Magnetfeld B_0 zwischen dem dritten und vierten Landau-Niveau, so dass bei B_0 nur die untersten drei Landau-Niveaus mit $n = 0$, $n = 1$ und $n = 2$ besetzt sind.

Wählt man die Leitungsbandenergie E_c als Energienullpunkt und beachtet, dass bei tiefen Temperaturen nur das unterste Subband besetzt ist, so lässt sich Gleichung (6) unter Berücksichtigung der Landauquantisierung im Magnetfeld umschreiben zu

$$E_n = \varepsilon_0 + \varepsilon_n = \varepsilon_0 + \hbar\omega_c \left(n + \frac{1}{2} \right) . \quad (10)$$

Im Magnetfeld ist die Zustandsdichte (für $E > E_0$) also nicht mehr konstant, sondern eine Folge von δ -Funktionen mit Abstand $\hbar\omega_c$, den Landau-Niveaus. Die Zustände, die ohne Magnetfeld im Energieintervall $\hbar\omega_c$ waren, befinden sich nun in den angrenzenden Landau-Niveaus. Demnach verschwindet die Zustandsdichte bei der Fermienergie, außer wenn ein Landau-Niveau die Bedingung $E_n = E_F$ erfüllt. Aus der Zustandsdichte (7) folgt, dass

$$N = \hbar\omega_c \frac{m}{\pi\hbar^2} = \frac{2eB}{h} \quad (11)$$

Zustände in jedem Landau-Niveau pro Einheitsfläche sind. Diese Zahl gilt für den Fall, dass die Zeemanaufspaltung so gering ist, dass sie nicht aufgelöst werden kann und keine Spinseparation stattfindet.

Mit Gleichung (11) erhält man für die Zahl der besetzten Landau-Niveaus

$$\frac{n_e}{N} = \frac{n_e h}{2eB} ,$$

da sämtliche $n_e l b$ freien Elektronen auf die besetzten Landau-Niveaus verteilt werden müssen. Nimmt dieser Ausdruck beispielsweise den Wert $n_e/N = 5.2$ an, so bedeutet dies, dass fünf Landau-Niveaus vollständig und das sechste teilweise besetzt sind. In unserem Beispiel liegt das sechste Landau-Niveau also am nächsten an der Fermienergie E_F . Der Füllfaktor ν berücksichtigt zusätzlich die energetische Aufspaltung der Landau-Niveaus aufgrund der Aufhebung der Spinartung im Magnetfeld (Zeeman-Effekt) und ist somit definiert als

$$\nu = \frac{n_e h}{eB} . \quad (12)$$

In unserem Beispiel wäre der Füllfaktor also $\nu = 10.4$. Vergrößert man das Magnetfeld bei konstanter Ladungsträgerdichte, so nimmt die Zahl der Zustände pro Landau-Niveau zu, während der Füllfaktor entsprechend abnimmt.

Die Modulation der Zustandsdichte der Elektronen bei der Fermienergie als Funktion des Magnetfeldes hat interessante Konsequenzen auf den Widerstandstensor und die Transporteigenschaften einer Hall-Probe im quantenmechanischen Limes. Besonders prominent sind der Quantenhalleffekt und die Shubnikov-de Haas-Oszillationen, die in diesem Versuch gemessen werden.

3.2 Starke Lokalisierung durch Unordnung

Abb. 6 skizziert die Zustandsdichte der Elektronen eines 2DEGs für ein endliches Magnetfeld unter Berücksichtigung der Spinaufspaltung. In dem dargestellten Fall besitzen gerade zwei Landau-Niveaus Energien unterhalb der Fermienergie und sind besetzt. Anstelle von δ -Funktionen beobachtet man selbst bei äußerst tiefen Temperaturen eine deutliche Verbreiterung der Maxima in der Zustandsdichte. Diese Beobachtung kann erklärt werden, wenn man eine gewisse Unordnung im Kristall erlaubt. Zufällig angeordnete Defekte bewirken aufgrund ihrer elektrischen und

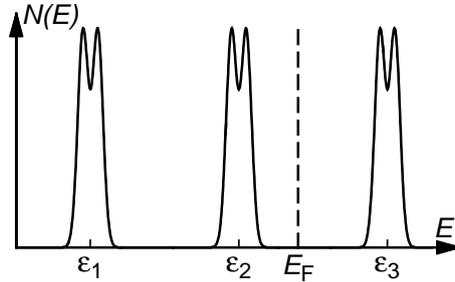


Abbildung 6: Zustandsdichte der Ladungsträger in einem 2DEG im Magnetfeld. Der Abstand der spinaufgespaltenen Landau-Niveaus beträgt $\hbar\omega_c$. In dem skizzierten Fall besitzen gerade zwei Landau-Niveaus Energien unterhalb der Fermienergie. Nur diese Niveaus sind besetzt.

elastischen Momente eine zusätzliche räumliche Modulation des Kristallfeldpotentials und schließlich der Energieverteilung der Landau-Niveaus im 2DEG. Letztere sieht also aus wie eine Gebirgslandschaft mit Vertiefungen, Tälern und Bergen.

Die Lösung der Bewegungsgleichung (1) eines freien Elektrons im Magnetfeld ergibt Zyklotronbahnen der Form (5). Berücksichtigt man die tatsächliche ungeordnete räumliche Modulation der Energieverteilung aufgrund von Defekten in einem realen Festkörper, so sind diese Zyklotronbahnen nicht mehr möglich. Die Ladungsträger können sich vielmehr nur auf Äquipotentiallinien bewegen, die mit ihrem Zyklotronradius kompatibel sind. Im Allgemeinen sind dies geschlossene Bahnen entweder entlang des Randes einer Vertiefung oder um einen Gipfel herum. Dies führt zu einer starken Lokalisierung der Ladungsträger in den vollbesetzten Landau-Niveaus. Durch inelastische Streuung kann diese Lokalisierung allerdings verhindert werden.

3.3 Thermische Streuung an der Fermikante

Für die Diskussion der Streuung von Elektronen im Festkörper sind die besonderen Eigenschaften von Fermiteilchen entscheidend, die hier noch einmal skizziert werden sollen. Bei der Temperatur $T = 0$ wären sämtliche Zustände mit $E < E_F$ mit Ladungsträgern besetzt, während außerhalb der "Fermikugel" alle Zustände frei wären. Befindet sich die Fermienergie gerade im Bereich eines Landau-Niveaus, so sind dessen Zustände nur zum Teil besetzt. Bei endlichen Temperaturen streuen Ladungsträger mit $|E - E_F| \lesssim k_B T$ an thermischen Gitterschwingungen. Es werden also auch Ladungsträger aus der Fermikugel herausgestreut und die "Fermikante weicht auf". Da im Festkörper aber typischerweise selbst bei Raumtemperatur $k_B T \ll E_F$ ist, betrifft dies höchstens einen kleinen Teil der Ladungsträger. Alle anderen Elektronen mit niedrigeren Energien $|E - E_F| \gg k_B T$ können dagegen nicht thermisch streuen, weil im Phasenraum im Umkreis mit $\delta E \sim k_B T$ keine

freien Zustände vorhanden sind. Für $\hbar\omega_c \gg k_B T$ können deshalb die Elektronen in den voll besetzten Landau-Niveaus nicht streuen.

Bei hohen Temperaturen bzw. geringen Magnetfeldern mit $\hbar\omega_c \ll k_B T$ ist die thermische Verbreiterung der Fermikante so groß, dass die Landau-Niveaus an der Fermikante nicht energetisch getrennt sind, und die Modulation der Zustandsdichte bei der Fermienergie ist nur schwach ausgeprägt. Erst bei genügend tiefen Temperaturen bzw. hohen Magnetfeldern mit $\hbar\omega_c \gg k_B T$ existieren Magnetfelder, bei denen keine Elektronen gestreut werden können, weil kein einziges Landau-Niveau mit der "aufgeweichten Fermikante" überlappt, und es kann Landau-Quantisierung beobachtet werden.

3.4 Modell der Randkanäle

Nach der Diskussion in den letzten beiden Abschnitten sollte man erwarten, dass für $\hbar\omega_c \gg k_B T$ immer dann, wenn gerade kein Landauniveau mit der Fermikante überlappt, Lokalisierung auftritt und der Widerstand maximal wird. Im Experiment beobachtet man allerdings genau das Gegenteil: Der Längswiderstand einer Hall-Probe kann bei genügend großen Magnetfeldern in diesem Fall sogar ganz verschwinden! Die Erklärung dieses erstaunlichen Befundes liegt in der endlichen Ausdehnung der Probe senkrecht zum Magnetfeld begründet.

Zunächst soll ein sehr klassisches und anschauliches Argument diskutiert werden. Um die Probe an den Rändern zu verlassen, müssen die Elektronen die Austrittsenergie überwinden. Dies entspricht einem sehr hohen Potential. Zudem ist dieses Potential so steil, dass die Gebirgslandschaft des Unordnungspotentials sich nur noch in geringen Variationen der Steigung äußern, aber keine Berge und Täler mehr vorhanden sind. Deshalb erfahren die Ladungsträger direkt am Rand der Probe keine Lokalisierung. Stattdessen werden sie an diesem Potential wie an einem glatten Spiegel reflektiert und bewegen sich entlang dem Rand der Probe. Es bilden sich so genannte Randkanäle, welche den Strom tragen. Abb. 7 zeigt den Einfluss der Randpotentiale auf die Lokalisierung der Elektronen in diesem anschaulichen Bild.

Für eine semiklassische Diskussion erweitern wir die Energie der Landau-Niveaus in Gleichung (10) um das Randpotential $U(y)$

$$E(n, y) = \varepsilon_0 + \hbar\omega_c \left(n + \frac{1}{2} \right) + U(y) ,$$

welches im Inneren der Probe verschwindet und an den Rändern der Probe durch unendlich hohe Potentialwände angenähert wird. Die Energien der Landau-Niveaus nehmen demnach an den Rändern der Probe stark zu und schneiden dort sogar die Fermienergie. Diese Deformation der Landau-Niveaus ist in Abb. 8 dargestellt. Anders als im Inneren der Probe verschwindet an ihren Rändern die Zustandsdichte an der Fermikante also für kein Magnetfeld. Die Anzahl der Randkanäle ist dabei identisch mit der Zahl der Landauniveaus mit $E < E_F$.

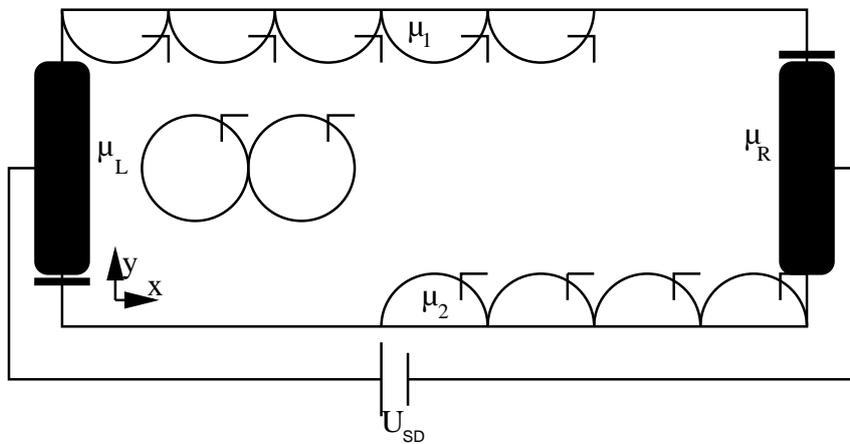


Abbildung 7: Anschauliches Bild zur Lokalisierung der Elektronen im Inneren der Probe und Randkanäle.

Tatsächlich sind die Randkanäle eindimensional, denn die endliche Ausdehnung der elektronischen Ortswellenfunktion und das Pauliprinzip verbieten eine höhere Elektronendichte. Die quantenmechanischen Eigenschaften von eindimensionalen Leitern sollen hier kurz anhand des so genannten Quantenpunktkontaktes diskutiert werden. Ein Quantenpunktkontakt ist eine zusätzliche Einschnürung eines 2DEGs. Der Grad der Einschnürung kann dabei gewöhnlich mittels eines externen elektrischen Feldes variiert werden, so dass der Übergang von einem zweidimensionalen Leiter zum eindimensionalen Grenzfall – dem Quantenpunktkontakt – vollzogen werden kann. In einem typischen Experiment wird nun der Strom durch die Probe bei konstanter angelegter Spannung in Abhängigkeit des Grades der Einschnürung gemessen. Abb. 9 zeigt das Ergebnis einer solchen Messung des Leitwertes durch einen Quantenpunktkontakt bei sehr tiefer Temperatur. Beobachtet werden Stufen mit dem Abstand $2e^2/h$, bis der Leitwert schließlich verschwindet, weil der Quantenpunktkontakt geschlossen ist. Das Leitwertquantum e^2/h entspricht gerade dem Leitwert eines Kanals, in den genau ein Elektron passt. Allerdings passen bei einer Messung ohne Magnetfeld aufgrund der Spinartung in jeden Kanal tatsächlich zwei Elektronen mit entgegengesetztem Spin. Wird der Quantenpunktkontakt im Experiment immer mehr eingeschnürt, so wird offenbar ein Kanal nach dem anderen geschlossen und man beobachtet Stufen der Größe $2e^2/h$. Dieses Verhalten ist ein experimenteller Beweis für die Quantisierung des Leitwertes.

Die Randkanäle in einer Hall-Probe sind ein weiteres Beispiel eindimensionaler Kanäle, falls im Inneren der Probe keine Streuung stattfindet, also kein Landau-Niveau mit $E_n \simeq E_F$ existiert. Dabei trägt jeder Randkanal gerade den Leitwert $2e^2/h$, wenn Spinartung vorliegt. Die räumliche Trennung der Randkanäle (vgl. Abb. 8) verhindert dabei Streuung zwischen den Kanälen. Zudem besitzen die Elektronen, die sich mit der Fermigeschwindigkeit bewegen, in benach-

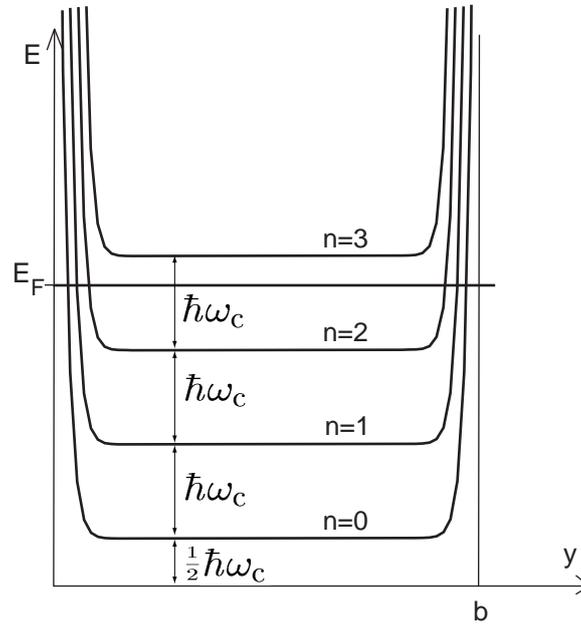


Abbildung 8: Deformation der Landau-Niveaus durch Randpotentiale ohne Berücksichtigung der Spinaufspaltung.

barten Randkanälen identische Impulse. Nach der Lenz'schen Regel $-ev_x B = dU(y)/dy$ bewegen sich die Elektronen in den Randkanälen an den beiden gegenüberliegenden Rändern der Probe in entgegengesetzte Richtungen. Rückwärtsstreuung der Elektronen in den Randkanälen ist wegen dieser räumlichen Trennung der Bewegungsrichtungen extrem unwahrscheinlich. Der resultierende Strom durch die Probe kommt daher, dass sich die Fermigeschwindigkeiten an den gegenüberliegenden Rändern der Probe aufgrund der Hall-Spannung unterscheiden, wie die Abb. 10 illustriert.

Bereits in den klassischen Betrachtungen hatten wir anhand des Verlaufs der Äquipotentiallinien in Abb. 2 das Ergebnis etabliert, dass in einem starken Magnetfeld die Hall-Spannung identisch mit der Source-Drain-Spannung ist ($U_H = U_{SD}$). Wenn alleine die Randkanäle den Strom tragen, ist dieses Ergebnis trivial. Da entlang der widerstandsfreien Randkanäle keine Spannung abfällt, gilt für Abb. 7 $\mu_1 = \mu_L$ und $\mu_2 = \mu_R$, wobei sich die Elektronen oben (μ_1) nach rechts und unten (μ_2) nach links bewegen. Nur an den so genannten "hot spots" (in Abb. 7 mit dicken Balken angedeutet) treten Potentialsprünge auf. Für die Hall-Spannung gilt dann

$$U_H \equiv U_{yx} = -\frac{1}{e}(\mu_1 - \mu_2) = -\frac{1}{e}(\mu_L - \mu_R) = U_{SD} . \quad (13)$$

In diesem Abschnitt wird die Größe des Leitwertquantums über den Strom durch einen Randkanal hergeleitet. Ganz allgemein gilt $I = \langle Q/t \rangle = \langle Q \rangle \langle 1/t \rangle$, da der Strom von der Ladung Q getragen wird. Befinden sich in einem Randkanal

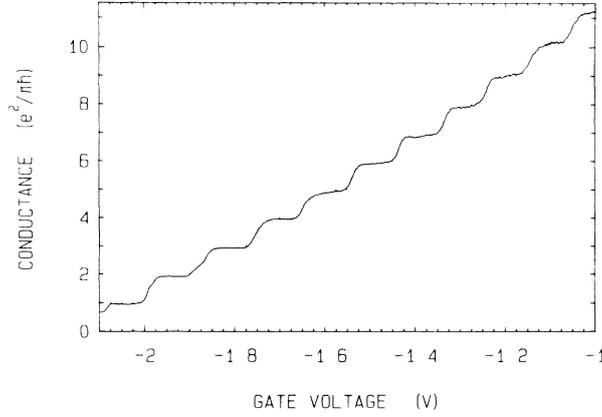


Abbildung 9: Leitwertquantisierung in einem Quantenpunktkontakt. Entlang der x -Achse wird ein eindimensionaler Kanal nach dem anderen geöffnet.

β Elektronen, so ist $\langle Q \rangle = -e\beta$. Aufgrund des Pauli-Prinzips sind nie mehrere Elektronen innerhalb ihrer de-Broglie-Wellenlänge $\lambda = 2\pi/k_F = h/mv_F$ am selben Ort. Somit passen gerade $\beta = l/\lambda = lm v_F/h$ Elektronen in einen Randkanal der Länge l (bzw. bei Spinentartung doppelt so viele). Zur Bestimmung von $\langle 1/t \rangle = \langle v \rangle / l$ muss berücksichtigt werden, dass die Elektronengeschwindigkeiten v an den beiden Rändern der Probe entgegengerichtet sind

$$\left\langle \frac{1}{t} \right\rangle = \frac{1}{l} \langle v_{LR} - v_{RL} \rangle$$

Der Zusammenhang zwischen $eU_{SD} = \mu_L - \mu_R$ und der Differenz der Geschwindigkeiten ist anschaulich in Abb. 10 dargestellt. Es gilt

$$\begin{aligned} \mu_L - \mu_R &= \frac{1}{2} m \langle v_{LR}^2 - v_{RL}^2 \rangle \\ &= \frac{1}{2} m \langle (v_{LR} + v_{RL})(v_{LR} - v_{RL}) \rangle \\ &= \frac{1}{2} m 2v_F \langle v_{LR} - v_{RL} \rangle \end{aligned}$$

und mit Gleichung (13) für den Strom durch einen Randkanal

$$I = \langle Q \rangle \left\langle \frac{1}{t} \right\rangle = -\frac{e}{h} (\mu_L - \mu_R) = \frac{e^2}{h} U_{SD} = \frac{e^2}{h} U_H \quad (14)$$

Der Querwiderstand beträgt also pro Randkanal

$$R_{xy}^{\text{Kanal}} = \frac{U_H}{I} = \frac{h}{e^2}$$

und e^2/h ist gerade das Leitwertquantum. Ist der Randkanal spinentartet, so beträgt sein Leitwert gerade zwei Leitwertquanten und R_{xy}^{Kanal} halbiert sich.

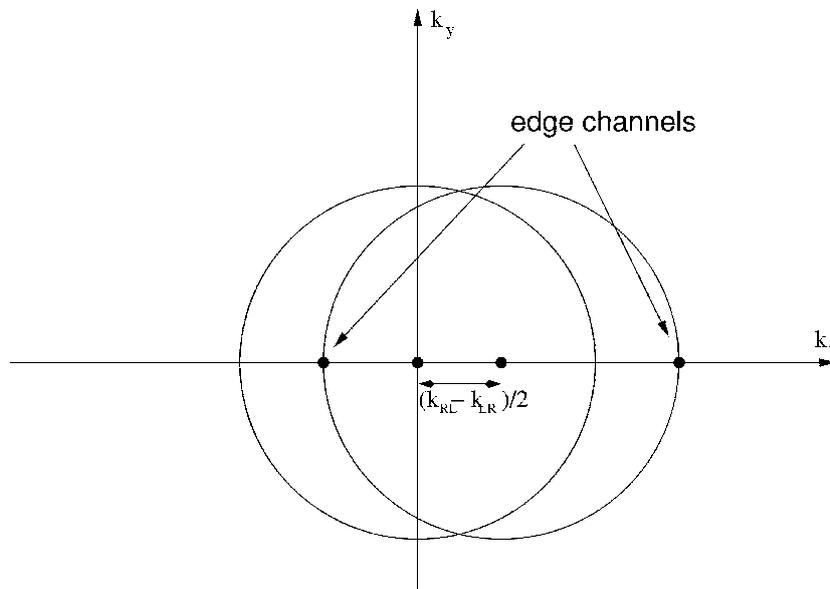


Abbildung 10: Durch die an der Probe anliegende Spannung wird die Fermischeibe in x -Richtung verschoben. Die Randkanäle befinden sich an den Schnittpunkten des rechten Kreises mit der x -Achse

3.5 Shubnikov-de Haas-Oszillationen

Interessant ist der Fall, in dem die Fermienergie gerade innerhalb eines (aufgrund von Unordnung aufgeweiteten) Landau-Niveaus liegt, also $E_n \simeq E_F$. Dann sind die Zustände dieses Landau-Niveaus nur zum Teil besetzt und aufgrund der endlichen Temperatur können Elektronen überall im 2DEG thermisch streuen. Die Lokalisierung ist aufgehoben, und das gesamte 2DEG trägt zum Stromtransport bei. Wichtig ist dabei insbesondere, dass überall in der Probe gestreut werden kann, auch aus den Randkanälen heraus. Deshalb steigt in diesem Fall der Widerstand entlang der Probe stark an. Dagegen verschwindet der Längswiderstand der Probe immer dann, wenn kein Landau-Niveau an der Fermienergie liegt und folglich alleine die Randkanäle den Strom in x -Richtung tragen.

Eine solche periodische Magnetfeldabhängigkeit des Längswiderstandes wird als Shubnikov-de Haas-Oszillation bezeichnet. Sie sind eine Konsequenz der Modulation der Zustandsdichte der Elektronen im Magnetfeld. An dieser Stelle soll noch darauf hingewiesen sein, dass der Verlauf dieses Magnetowiderstandes stark von der Probengeometrie abhängt. Z. B. in einer Probe, in der die Source- und Drain-Elektroden konzentrisch angeordnete kreisförmige Scheiben sind, kann es keine Randkanäle geben. In diesem Fall besitzen die Shubnikov-de Haas-Oszillationen Widerstandsminima, wenn die Zustandsdichte bei der Fermienergie gerade besonders groß ist. In einer Hall-Probe ist dagegen der elektrische Widerstand entgegen der intuitiven Erwartung immer dann besonders groß, wenn auch die Zustandsdichte bei der Fermienergie ein Maximum hat. Diese Erkenntnis hatten wir

allerdings auch schon im rein klassischen Drude-Modell im Kapitel 1 gefunden, denn die diagonalen Einträge des Widerstandstensors und des Leitwerttensors verhalten sich im Grenzfall eines hohen Magnetfeldes, also $\omega_c \tau \gg 1$, in einer Hall-Geometrie wie $\rho_{xx} \propto \sigma_{xx}$.

Die Shubnikov-de Haas-Oszillationen des Längswiderstandes einer Hall-Probe können ausgenutzt werden, um die Ladungsträgerdichte in einem 2DEG zu bestimmen. Die Maxima des Längswiderstandes ρ_{xx} treten gerade bei halbzahligen Füllfaktor auf, weil dann die Zustandsdichte an der Fermikante maximal ist. Bei Kenntnis der Magnetfeldstärken B_i und B_{i+1} aufeinanderfolgender Maxima (bzw. Minima) der Längswiderstände ρ_{xx} lässt sich die Ladungsträgerdichte folglich mit Hilfe der Definition des Füllfaktors in Gleichung (12) mit

$$n_e = \frac{e}{h} \frac{1}{(1/B_i) - (1/B_{i+1})} \quad (15)$$

bestimmen. Variiert man die Ladungsträgerdichte durch Anlegen eines äußeren elektrischen Feldes (z.B. mit Hilfe eines Kondensators, wie in diesem Versuch), so ändert sich der Abstand zwischen den Widerstandsmaxima entsprechend. Reichen die im Experiment verwendeten Magnetfeldstärken allerdings nicht aus, um die Zeemanaufspaltung aufzulösen, so besteht faktisch Spinentartung. In diesem Fall können in einer Messung nur die Maxima des Längswiderstandes mit geradem Füllfaktor aufgelöst werden und die tatsächliche Ladungsträgerdichte unterscheidet sich um einen Faktor zwei von dem Ergebnis aus Gleichung (15).

3.6 Quanten-Hall-Effekt

Experimentell findet man, dass sich bei Magnetfeldern, bei denen der Längswiderstand ρ_{xx} verschwindet, Plateaus in der gemessenen Hall-Spannung ausbilden. Die entsprechenden Hallwiderstände an den Plateaus erfüllen sehr exakt die Beziehung

$$R_H \equiv \rho_{yx} = \frac{R_K}{\nu} \quad \nu = 1, 2, \dots, \quad (16)$$

wobei ν der ganzzahlige Anteil des Füllfaktors ist, welcher in (12) definiert wurde. Die Klaus von Klitzing-Konstante R_K beträgt etwa 25.8 k Ω . Offenbar hängt auch die Hall-Spannung von der Modulation der Zustandsdichte der Elektronen an der Fermikante durch das magnetische Feld ab. Ein Vergleich mit Gleichung (14) legt den Zusammenhang

$$R_K = \frac{h}{e^2}$$

nahe. Dies ist gerade der Kehrwert eines Leitwertquantums, also des Leitwertes eines (spinaufgespaltenen) Randkanals. Nach Gleichung (14) beträgt die Hallspannung eine Vielfache der Größe $R_K I = h/e^2 I$, solange der gesamte Strom durch die Probe von den Randkanälen getragen wird. Der Proportionalitätsfaktor ist hierbei identisch mit der Anzahl der spinaufgespaltenen Randkanäle, also dem Füllfaktor ν . Der Übergang zwischen zwei Plateaus der Hallspannung geschieht gerade bei

solchen Magnetfeldstärken, bei denen ein Landau-Niveau mit der Fermikante überlappt, also wenn Elektronen in der Probe gestreut werden können. Denn nur, wenn Streuung von Ladungsträgern stattfindet, können sich die Source-Drain-Spannung und damit wegen $U_H = U_{SD}$ auch die Hallspannung kontinuierlich verändern. Genau bei diesen Magnetfeldern verändert sich auch die Zahl der Randkanäle um eins (oder zwei bei spinenarteten Randkanälen). Die Breite dieses Übergangsbereichs und damit die Breite der flachen Plateaus ist bei sehr tiefen Temperaturen durch die Verbreiterung der Landau-Niveaus (Kapitel 3.2) und bei deutlich höheren Temperaturen durch die Verbreiterung der Fermikante in der Größenordnung $k_B T$ (Kapitel 3.3) gegeben.

Abschließend sei noch vermerkt, dass ohne die lokalisierten Zustände (Kapitel 3.2) keine eindimensionalen Randkanäle existieren könnten. Stattdessen würden Elektronen im gesamten 2DEG zum Strom beitragen. Die Randkanäle sind aber notwendig für Quantisierung des Hall-Effekts. Da die Lokalisierung der Ladungsträger auf Unordnung und damit Defekten in der Probe beruht, könnte man in einer perfekten Probe deshalb den Quanten-Hall-Effekt nicht beobachten.

Die von Klitzing-Konstante h/e^2 kann mittels des Quanten-Hall-Effekts so genau bestimmt werden, dass sie mittlerweile weltweit als Widerstandsnormale verwendet wird. Eine weitere Anwendung des Quanten-Hall-Effekts ist die präzise Bestimmung der Feinstrukturkonstante α über die Beziehung

$$\alpha = \frac{e^2}{h} \frac{\mu_0 c}{2} \approx \frac{1}{137} .$$

Die von-Klitzing-Konstante wurde mit einer relativen Genauigkeit von 3×10^{-9} zu $R_K = 25812.807449 \Omega$ gemessen. Für mehr Informationen zur von-Klitzing-Konstanten siehe Internetseiten wie die der metrologischen Institute (PTB: <http://www.ptb.de>, NIST,...)

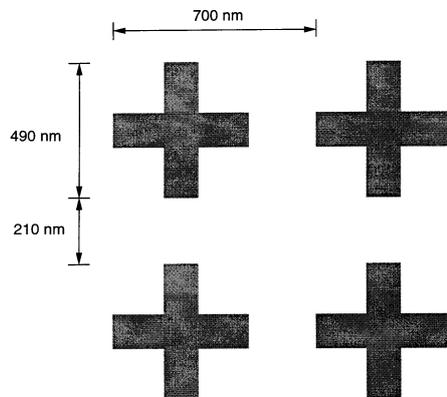


Abbildung 12: Detailausschnitt aus Abb. 11 mit den Abmessungen der kreuzförmigen Antidots *nur* für die Proben S1 und S2.

Es existieren eine Reihe verschiedener Proben, die sich vor allem hinsichtlich der genauen Geometrie des Antidot-Übergitters unterscheiden. Die Proben S1 und S2 enthalten ein regelmäßiges Gitter kreuzförmiger Antidots entsprechend Abb. 12. In allen anderen Proben bestehen die Antidots aus runden geätzten Löchern. Abb. 13 zeigt eine AFM-Messung (Atomic Force Microscope) eines Ausschnitts der Oberfläche von Probe B1 und ein Höhenprofil über drei benachbarte Antidots. Wichtige Parameter der einzelnen Proben sind in Tabelle 1 aufgelistet. Bitte fragen Sie den Betreuer, welche Probe verwendet wird!

Tabelle 1: Wichtige Probenparameter

Probe	Form der Antidots	Gitterkonst. der Antidots	Top-Gate	Top-Gate-spannungen (V)
S1	Kreuze	700 nm	5 nm Ti	+0.0 +0.5 +1.0
S2	Kreuze	700 nm	5 nm Ti	+0.0 +0.5 +1.0
B1	runde Löcher	700 nm	5 nm Ti	-0.2 +0.0 +1.0
B2	runde Löcher	840 nm	200 nm Au	-0.65 -0.3 +0.2
D1	runde Löcher	500 nm	200 nm Au	+0.0 +0.2 +0.4
D2	runde Löcher	750 nm	200 nm Au	-0.15 +0.0 +0.5
D3	runde Löcher	500 nm	200 nm Au	-0.2 +0.0 +0.5
D4	runde Löcher	670 nm	200 nm Au	+0.0 +0.25 +0.5

Zur Auswertung der zu messenden Spannungen ist es notwendig den Strom durch die Probe zu kennen. Im Versuch steht eine Spannungsquelle (und keine Konstantstromquelle) zur Verfügung. Mit Hilfe eines Vorwiderstandes der Größe $1\text{ M}\Omega$ soll ein Konstantstrom von etwa $2\ \mu\text{A}$ eingestellt werden. Dabei kann zunächst angenommen werden, dass der Probenwiderstand deutlich geringer als $1\text{ M}\Omega$ ist. Ob allerdings die Magnetfeldabhängigkeit des Probenwiderstands zu ei-

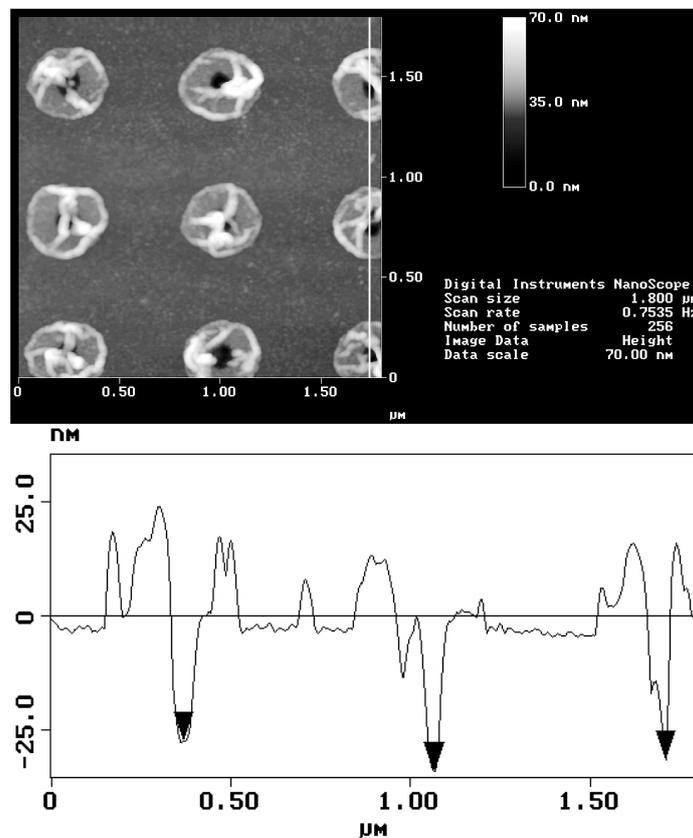


Abbildung 13: AFM-Bild der Oberfläche der Probe B1 im Bereich von 9 Antidots (oben) und ein Höhenprofil entlang der weißen Linie am rechten Rand des AFM-Bilds (unten). In dieser Probe ist deutlich ein unregelmäßiger Auswurf (Teflon) neben den geätzten Löchern zu erkennen, der sich auch im Höhenprofil wieder spiegelt.

nem nennenswerten systematischen Fehler in der Strombestimmung führt, soll ermittelt werden. Die zu messenden Spannungen werden mittels eines Differenzverstärkers um einen Faktor 100 verstärkt und mit einem x - y -Schreiber aufgezeichnet.

Die Verkabelung der verschiedenen Geräte ist in Abb. 14 schematisch dargestellt. **Beim Anschließen der Kabel ist große Vorsicht geboten, denn die Probe ist aufgrund ihrer geringen Abmessungen sehr empfindlich gegen zu hohe Spannungen, zu hohe Ströme, plötzliche Potentialänderungen und mechanische Erschütterungen! So sollte der Source-Drain-Strom niemals deutlich größer als $2 \mu\text{A}$ sein, die Gatter-Spannung darf die angegebenen Werte nicht überschreiten und an den Spannungsabgriffen soll kein Strom angelegt werden. Außerdem muss unbedingt darauf geachtet werden, dass grundsätzlich nur Kabel an die Probe angeschlossen werden, wenn sie auf Erdpotential liegen.** Die Spannung kann dann kontrolliert und langsam mithilfe von Potentiometern

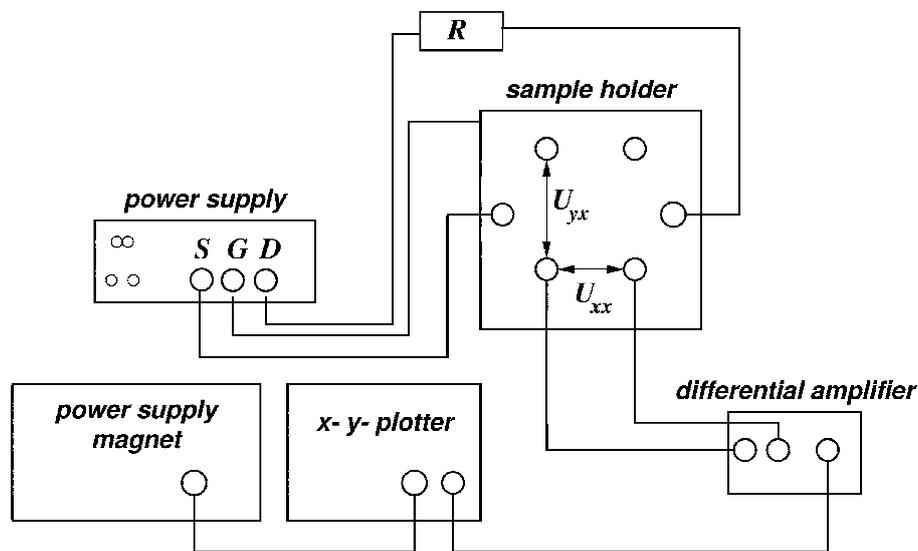


Abbildung 14: Verkabelung der Geräte

eingestellt werden. Währenddessen wird die Spannung über einen zweiten Kontakt gemessen!

4.2 Durchführung

Bevor mit der Messung begonnen werden kann, müssen einige Vorbereitungen getätigt werden, bei denen der Betreuer behilflich ist. Zunächst muss das Vakuumrohr evakuiert und mit wenigen mbar Austauschgas gefüllt werden, um eine gute Wärmeleitung zwischen dem flüssigen Helium und der Probe zu gewährleisten. Anschließend werden der Probenstab und der Magnet in eine Heliumkanne zur Kühlung eingeführt. Dabei sollte man vorsichtig vorgehen und den Kannendruck im Auge behalten. Aufgrund der sehr geringen Verdampfungswärme von Helium (0.0845 kJ/mol) geht viel des teuren Kühlmittels verloren, wenn man den Probenhalter schnell in die Kanne einführt. Deshalb sollte er zunächst nur so weit eingeführt werden, dass er die Flüssigkeitsoberfläche berührt (erkennbar am Druckanstieg in der Kanne), um mit dem immer noch sehr kalten gasförmigen Helium gekühlt zu werden. Nach einiger Zeit kann der Probenhalter dann vollständig eingeführt und mit der Verkabelung (siehe Abb. 14) und Messung begonnen werden.

Es sind bei diesem Versuch jeweils die Längs- und Querspannungen in der unstrukturierten und strukturierten Probe in Abhängigkeit des Magnetfeldes für jeweils drei verschiedene Gatterspannungen zu messen (siehe Tabelle 1). Zusätzlich sollen die klassischen Grenzwerte der Längsspannungen ($B = 0$) für die unstrukturierte Probe mit hoher Auflösung gemessen werden, um den Fehler bei der Bestimmung der Beweglichkeit zu reduzieren. Ganz allgemein sollte darauf geachtet werden, dass die Auflösung der verschiedenen Kurven für die durchzuführende Auswertung ausreicht. Eventuell muss ein Teil einer Kurve noch einmal mit höhe-

rer Auflösung gemessen werden. Achten Sie darauf, dass die Genauigkeit der Auswertung nicht durch die Ableseungenauigkeit beschränkt ist. Insbesondere sollen die Widerstandsmodulationen des Antidotgitters mit einer großen Auflösung gemessen werden.

Das Spulennetzteil kann so eingestellt werden, dass es automatisch einen gewählten Strombereich durchfährt. (Dabei kann sowohl mit zunehmendem als auch mit abnehmendem Magnetfeld gemessen werden.) Der Strom (Anzeige des Magnetnetzgerätes) kann mit der spulenabhängigen Feldkonstanten 0.226 T/A in die Magnetfeldstärke im Inneren der Spule umgerechnet werden. Ein Testausgang des Magnetnetzteils liefert eine Spannung von 2.0049 mV/A und soll mit dem x -Eingang des x - y -Schreibers verbunden werden.

Abschließend soll der Fehler quantifiziert werden, der durch die Verwendung einer Konstantspannungsquelle mit großem Vorwiderstand gegenüber einer Konstantstromquelle entsteht. Dazu soll nun der Spannungsabfall der gesamten Probe, der zunächst als vernachlässigbar gegenüber dem Vorwiderstand angenommen wurde, in Abhängigkeit des Magnetfeldes aufgezeichnet werden. Dabei ist jedoch zu beachten, dass der Vorwiderstand weiterhin verwendet wird. **(Vorsicht: Nie ein Kabel an- oder abstecken, an dem eine externe Spannung anliegt, da dies die Probe zerstören könnte!)**

Für alle Messungen reichen 2 große Blätter Millimeterpapier aus. Am besten nutzt man eines für die Messungen im strukturierten und eines für die Messungen im unstrukturierten Bereich. Dabei können unterschiedliche Farbköpfe in den x - y -Schreiber eingesetzt werden, um die Messungen anschließend zu unterscheiden. Selbstverständlich ist hierbei eine übersichtliche und eindeutige Beschriftung der Kurven und der Achsen auf dem Millimeterpapier!

Damit ist alles zum Versuch gesagt und nun viel Spaß!

4.3 Auswertung

Die Auswertung soll eine kurze Einleitung sowie eine kurze Zusammenfassung enthalten. Im Hauptteil sollen die Daten analysiert, mit theoretischen Erwartungen verglichen und diskutiert (!) werden. Bitte achten Sie auf eine eindeutige und saubere Beschriftung der Messkurven, die eine Zuordnung der gemessenen Daten zu den Wertetabellen und Endergebnissen ermöglicht.

1. Unstrukturierter und strukturierter Bereich:

- (a) Beurteilen Sie die schwerwiegendsten (!) statistischen und systematischen Fehlerquellen möglichst realistisch. Schätzen Sie insbesondere quantitativ (!) ab, wie gut die Annahme eines magnetfeldunabhängigen Stroms durch die Probe ist. Verwenden Sie hierfür die Messung des Widerstandes, der über die gesamte Probe abfällt. Verwenden Sie diese Fehlerabschätzungen für alle weiteren Auswertungen.

- (b) Bestimmen Sie die Ladungsträgerdichte aus der Steigung der Hall-Spannung. Zeichnen Sie dazu die klassische Hall-Gerade jeweils über den gesamten Magnetfeldbereich ein, um eine möglichst hohe Ablesegenauigkeit zu erreichen. Entspricht der gemessene Kurvenverlauf Ihren Erwartungen?
- (c) Bestimmen Sie die Plateauwerte des Hallwiderstands und daraus die zugehörigen Füllfaktoren. Vermeiden Sie die Verwendung des Literaturwertes der von-Klitzing-Konstante.
- (d) Entsprechen die berechneten Füllfaktoren Ihren Erwartungen? Welche Messgrößen gehen in die Berechnung der Füllfaktoren über Gleichung (16) ein, wenn der Literaturwert der von-Klitzing-Konstante als bekannt vorausgesetzt wird? Ist zu vermuten, dass eine dieser Größen mit einem systematischen Fehler behaftet ist? Kann dieser quantifiziert werden?
- (e) Bestimmen Sie die Ladungsträgerdichte aus den SdH-Oszillationen. Tragen Sie dafür die Füllfaktoren der SdH-Minima sowie der SdH-Maxima in Abhängigkeit des reziproken Magnetfeldes ($1/B$) auf und bestimmen die Ladungsträgerdichte aus dem Kurvenverlauf. Welchen Kurvenverlauf erwarten Sie? Hinweis: Durch eine parallele zweidimensionale leitfähige Schicht mit unterschiedlicher Ladungsträgerdichte kann es in manchen Proben zu zusätzlichen SdH-Oszillationen kommen.
- (f) Bestimmen Sie die Beweglichkeit der Elektronen aus der Längsspannung U_{xx} bei $B = 0$.
- (g) Tragen Sie die Ladungsträgerdichten sowie die Beweglichkeiten in Abhängigkeit der Gatterspannung auf. Stimmen die aus verschiedenen Verfahren gewonnenen Ladungsträgerdichten innerhalb der Fehlergrenzen miteinander überein? Vergleichen und interpretieren Sie die Ergebnisse. Versuchen Sie, die Abhängigkeit der Beweglichkeit von der Ladungsträgerdichte zu erklären. Diskutieren Sie die Ergebnisse für die verschiedenen Probenteile (mit bzw. ohne Antidotgitter).
- (h) Vergleichen Sie die Ergebnisse verschiedener Auswertverfahren sowie der beiden Probenteile miteinander. Wie gut stimmen die Ergebnisse innerhalb Ihrer Fehlerabschätzung mit Ihren Erwartungen überein?

2. Im strukturierten Bereich zusätzlich:

- (a) Interpretieren Sie Maxima in der Längsspannung, welche sich nicht durch SdH-Oszillationen erklären lassen.
- (b) Identifizieren Sie die möglichen Elektronenbahnen im Antidotgitter (Zeichnung!).
- (c) Ab welchem Magnetfeld sollten Runaway-Trajektorien dominieren? Vergleichen Sie Ihre Erwartung mit dem Experiment.

- (d) Erklären Sie qualitativ die beobachtete Abhängigkeit der Elektronenbahnen von der Gatterspannung. Können Sie eine Aussage über das Antidotgitter-Potential machen? (Tip: Beachten Sie die Abhängigkeit der Fermienergie von der Gatterspannung).

5 Weiterführende Literatur

1. K.Kopitzki, „Einführung in die Festkörperphysik“, Teubner Studienbücher
2. H.Ibach/H.Lüth: „Festkörperphysik. Einführung in die Grundlagen“, Springer Verlag
3. J. Singleton u.a., „Band Theory and Electronic Properties of Solids“, Oxford University Press
4. S. Datta, „Electronic Transport in Mesoscopic Systems“, Cambridge University Press
5. M. Janßen, O. Viehweger, U. Fastenrath, J. Hajdu, „Introduction to the Theory of the Integer Quantum Hall Effect“, VCH Verlagsgesellschaft
6. Originalarbeit von Klaus von Klitzing: K. von Klitzing, PRL 45, 494 (1980)
7. Vortrag anlässlich der Nobelpreisverleihung: K. von Klitzing, Reviews Of Modern Physics 58, 519 (1986) bzw. <http://www.nobel.se>